

# Grundlegende Zählmethoden

## Korrespondenzzirkel Mathematik – 2. Brief

### Klassenstufe 7/8

#### Was dich erwartet:

Stell dir vor, du müsstest alle Möglichkeiten, ein Zahlenschloss zu knacken oder eine Fußballmannschaft aufzustellen, einzeln aufschreiben – du wärst vermutlich tagelang beschäftigt.

In diesem Kurs tauchen wir deshalb in die **Kombinatorik** ein, die Kunst des „klugen Zählens“. Diese Methoden sind ein echtes Power-Tool für mathematische Wettbewerbe wie die Mathematik-Olympiade, weil sie dir helfen, selbst in komplexem Chaos eine klare Struktur zu erkennen.

Wir beginnen mit den einfachen **Produkt- und Additionsregeln** und arbeiten uns vor bis zu den universellen **Urnenmodellen**. Dabei wirst du sehen, dass es mathematisch oft gar keinen Unterschied macht, ob wir Menüs im Restaurant zusammenstellen oder Kugeln aus einer Urne ziehen – die Logik dahinter bleibt dieselbe. Am Ende des Kurses wirst du die sechs wesentlichen Grundformeln beherrschen, mit denen sich fast jedes Zählproblem bändigen lässt.

**Hier gilt:** Es wird in keiner Weise erwartet, dass du alle Aufgaben löst! Wenn du die Zeit dazu hast – super! Aber wenn nicht, kannst du auch nur die Aufgaben einschicken, die du geschafft hast; selbst wenn das nur eine Aufgabe ist. Wir freuen uns über jede Rücksendung!

#### Was du bereits kennen solltest:

Für die bevorstehenden Aufgaben solltest einzig das **Kürzen von Brüchen** schon gut beherrschen. Andere Voraussetzungen brauchst du nicht. Du kannst dich also gleich einlesen.

# 1 Produktregel – das grundlegende Zählprinzip

## Beispiel 1:

Wie viele zweistellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3 und 0 bilden?

**Lösung:** Für die Zehnerziffer gibt es drei verschiedene Auswahlen, weil es keine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer 0 gibt. Für die Einerziffer gibt es vier verschiedene Auswahlen. Deshalb gibt es  $(3 \cdot 4 =) 12$  Möglichkeiten für solche zweistelligen Zahlen.

## Allgemein gilt:

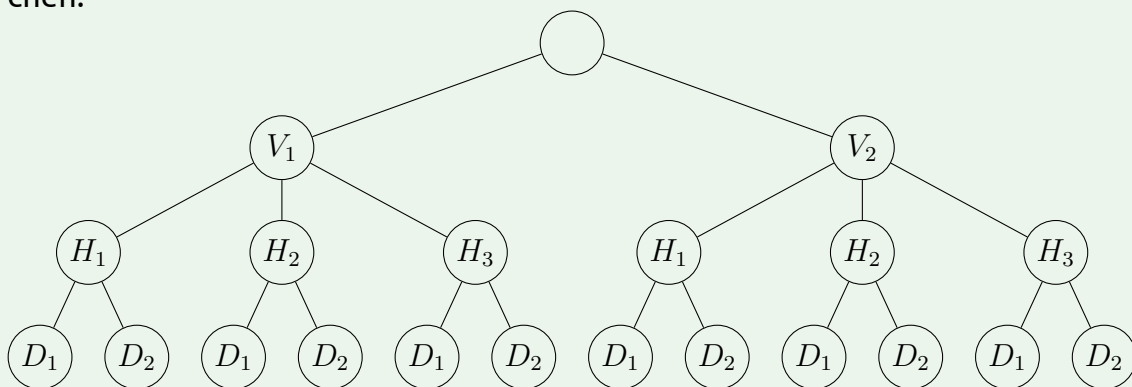
Wenn eine Folge von  $k$  Entscheidungen zu treffen ist, bei der es für die erste Entscheidung  $n_1$  Möglichkeiten, für die zweite Entscheidung  $n_2$  Möglichkeiten usw. und für die  $k$ -te Entscheidung  $n_k$  Möglichkeiten gibt, dann gibt es für die gesamte Folge der Entscheidungen  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  Möglichkeiten. Diese **Produktregel** ist das grundlegende Zählprinzip.

## Beispiel 2:

In einem Restaurant gibt es für die Zusammenstellung des Menüs zwei Vorspeisen, drei Hauptgänge und als Nachtisch zwei Dessertvorschläge. Wie viele verschiedene Menüs lassen sich daraus bilden?

**Lösung:** Es gibt  $(2 \cdot 3 \cdot 2 =) 12$  verschiedene Menüvarianten.

Die Produktregel kann man immer mit einem Baumdiagramm veranschaulichen.



$V_1$  und  $V_2$  bezeichnen die beiden Vorspeisen,  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$  die drei Hauptgänge sowie  $D_1$  und  $D_2$  die beiden Dessertvorschläge. Insgesamt erhält man 12 verschiedene Pfade des Baumdiagramms für die verschiedenen Menüvarianten.

## 2 Additionsregel

Manchmal ist es für das Abzählen vorteilhaft, wenn die abzuzählende Menge *vollständig* in *disjunkte*<sup>1</sup> Teilmengen zerlegt wird. In diesem Fall sind die Anzahlen für die Teilmengen zu **addieren**. Das korrekte Abzählen wird durch die Addition allein allerdings nicht gelingen, wenn die Forderung disjunkter Teilmengen nicht erfüllt ist. Wenn die Forderung disjunkter Teilmengen nicht erfüllt ist, wird das korrekte Abzählen allein durch Addition nicht gelingen, dann muss man noch die Anzahl der doppelt gezählten gemeinsamen Elemente subtrahieren.

### Beispiel 3:

Auf wie viele Arten können sich 3 Mädchen und 3 Jungen so in eine Reihe setzen, dass Mädchen und Jungen abwechselnd sitzen? Lösung: Wir betrachten zwei Fälle, d.h. wir zerlegen vollständig in zwei Teilmengen, je nachdem, ob ganz links ein Mädchen oder ein Junge sitzt.

**1. Fall:** Ganz links sitzt ein Mädchen. Dann gibt es von links nach rechts ( $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =$ ) 36 verschiedene Anordnungen. Für den ersten Platz eines von drei Mädchen, für den zweiten einen von drei Jungen, für den dritten Platz eines von zwei Mädchen usw.

**2. Fall:** Jetzt sitzt ganz links ein Junge. Dann sind es wieder ( $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =$ ) 36 verschiedene Anordnungen, wobei keine Anordnung schon im 1. Fall dabei sein kann. Andererseits ist es eine vollständige Zerlegung in zwei Teilmengen. Folglich können die 3 Mädchen und 3 Jungen auf ( $36 + 36 =$ ) 72 verschiedene Arten die Plätze einnehmen.

### Beispiel 4:

Wie viele zweistellige Zahlen gibt es, die durch 5 oder durch 9 teilbar sind?

**Lösung:** Mathematisch ist ein solches „oder“ immer ein einschließendes „oder“. Zählen wir die Zahlen, die durch 5 teilbar sind, und die Zahlen, die durch 9 teilbar sind, dann zählen wir die Zahlen, die durch 5 und durch 9 teilbar sind, doppelt.

Anzahl durch 5 teilbarer Zahlen: Die kleinste zweistellige, durch 5 teilbare Zahl ist ( $2 \cdot 5 =$ ) 10, die größte ist ( $19 \cdot 5 =$ ) 95. Das sind 18 Zahlen.

Anzahl durch 9 teilbarer Zahlen: Die kleinste zweistellige, durch 9 teilbare Zahl ist ( $2 \cdot 9 =$ ) 18, die größte ist ( $11 \cdot 9 =$ ) 99. Das sind 10 Zahlen.

Dabei wurden 45 und 90 doppelt gezählt, weil sie sowohl durch 5 als auch durch 9 teilbar sind. Folglich gibt es ( $18 + 10 - 2 =$ ) 26 zweistellige Zahlen, die durch 5 oder durch 9 teilbar sind.

<sup>1</sup> Disjunkte Mengen sind solche, die keine Elemente gemeinsam haben. Ihr Durchschnitt ist die leere Menge.

## 3 Die kombinatorischen Grundaufgaben

### 3.1 Permutation<sup>2</sup> ohne Wiederholung

**Grundaufgabe:** Auf wie viele Arten kann man  $n$  Objekte in verschiedenen Reihenfolgen anordnen?

**Herleitung:** Für das erste Objekt in der Anordnung kann man aus allen  $n$  Objekten wählen; es gibt dafür also  $n$  Möglichkeiten. Für das zweite Objekt in der Anordnung kann man nur noch aus den verbleibenden  $n - 1$  Objekten wählen; es gibt dafür also  $n - 1$  Möglichkeiten usw. Für die letzten beiden verbleibenden Objekte gibt es noch 2 Möglichkeiten und für das letzte nur noch eine. Das letzte Objekt ist festgelegt. Das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$  wird als  $n!$  geschrieben (gesprochen „n Fakultät“). So ist zum Beispiel  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

#### Formel:

Für die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung von  $n$  Objekten gilt:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Diese Situation lässt sich auch auf das Ziehen aller  $n$  Kugeln aus einem Gefäß ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge übertragen. Dieses Gedankenexperiment ist unter dem Begriff des Urnenmodells in der Stochastik bekannt. Beim **Urnenmodell** wird ein Gefäß, das als Urne bezeichnet wird, mit einer bestimmten Anzahl an Kugeln gefüllt, von denen danach zufällig Kugeln gezogen werden, wobei jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen wird. Man unterscheidet das Ziehen mit Zurücklegen, bei dem die gezogene Kugel noch einmal gezogen werden kann, und das Ziehen ohne Zurücklegen.

### 3.2 Variation ohne Wiederholung

**Grundaufgabe:** Auf wie viele Arten kann man  $k$  Objekte aus  $n$  Objekten (mit  $k \leq n$ ) unter Beachtung der Reihenfolge auswählen?

**Herleitung:** Für das erste auszuwählende Objekt in der Anordnung kann man aus allen  $n$  Objekten wählen; es gibt dafür also  $n$  Möglichkeiten. Für das zweite auszuwählende Objekt in der Anordnung kann man nur noch aus den verbleibenden  $n - 1$  Objekten wählen; es gibt dafür also  $n - 1$  Möglichkeiten usw. Da wir  $k$  Objekte auswählen, bleiben noch  $n - k$  Objekte nicht ausgewählt und gibt es für das letzte, also das  $k$ -te Objekt, noch  $n - k + 1$  Möglichkeiten.

<sup>2</sup>von lateinisch *permutare* „vertauschen“

## Formel:

Für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von  $k$  ausgewählten Objekten aus  $n$  Objekten gilt:

$$V_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Für  $k = n$  erhält man im Sonderfall die Anzahl der Permutationen aus 3.1. Es gilt  $0! = 1$ .

Beim Urnenmodell entspricht diese Grundaufgabe dem Ziehen von  $k$  Kugeln aus einem Gefäß mit  $n$  Kugeln ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

## Beispiel 5:

Sechs Schülerinnen wollen sich auf 10 freie Plätze im Kino setzen. Auf wie viele Arten ist das möglich?

**Lösung:** Aus  $n = 10$  freien Plätzen sind  $k = 6$  Plätze auszuwählen und in einer bestimmten Reihenfolge zu besetzen. Nach der Formel erhält man  $V_{10,6} = \frac{10!}{(10-6)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200$  Möglichkeiten.

Bei dieser Berechnung kann man  $4!$  kürzen, sodass nach dem Kürzen nur das Produkt  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$  zu berechnen ist. Inhaltlich würde man so argumentieren: Die erste Schülerin kann aus 10 freien Plätzen wählen, die zweite aus 9, die dritte aus 8 usw., schließlich die sechste aus 5 freien Plätzen.

## 3.3 Kombination ohne Wiederholung

**Grundaufgabe:** Auf wie viele Arten kann man  $k$  Objekte aus den  $n$  Objekten auswählen (mit  $k \leq n$ ) ohne Beachtung der Reihenfolge?

**Herleitung:** Wird die Reihenfolge der ausgewählten Objekte bei der Variation beachtet, so gibt es bei  $k$  ausgewählten Objekten wegen der Anzahl ihrer Permutationen  $k!$  verschiedene Auswahlen, die jetzt ohne Beachtung der Reihenfolge auf eine Auswahl reduziert werden.

## Formel:

Folglich muss die Formel für die Variation durch  $k!$  dividiert werden:

$$K_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Den Bruch  $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  schreibt man als Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  (gesprochen „n über k“).

Für Binomialkoeffizienten gilt stets  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Deren Berechnung kann man immer dadurch vereinfachen, dass man die größere der beiden Fakultäten  $k!$  und  $(n-k)!$  kürzt. Zum Beispiel gilt:  $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ .

Beim Urnenmodell entspricht diese Grundaufgabe dem Ziehen von  $k$  Kugeln aus einem Gefäß mit  $n$  Kugeln ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge. Das wird auch als *Ziehen mit einem Griff* bezeichnet.

## Beispiel 6:

Beim Kegeln gilt es, mit einer Kugel 9 Kegel umzuwerfen.

- Wie viele Wurfbilder mit 6 gefallenem Kegeln gibt es theoretisch?
- Wie viele Wurfbilder mit 2 stehen gebliebenen Kegeln gibt es theoretisch?
- Wie viele Wurfbilder sind insgesamt theoretisch möglich?

## Lösung:

$$\text{a) } \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84 \text{ Wurfbilder}$$

$$\text{b) } \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36 \text{ Wurfbilder}$$

$$\text{c) } \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{9}$$

$$= 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 \text{ Wurfbilder}$$

## 3.4 Variation mit Wiederholung

**Grundaufgabe:** Auf wie viele Arten kann man  $k$  Objekte aus den  $n$  Objekten unter Beachtung der Reihenfolge auswählen, also verschieden anordnen? Dabei soll jedes Objekt mehrfach und höchstens  $k$ -mal ausgewählt werden können.

*Hinweis:* Hier muss nicht  $k \leq n$  gelten!

**Herleitung:** Bei jeder der  $k$  Auswahlen kann jedes der  $n$  Objekte ausgewählt werden.

Formel:

Folglich gibt es

$$V_{n,k}^w = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k$$

Arten der Auswahl und Anordnung.

Beim Urnenmodell entspricht diese Grundaufgabe dem Ziehen von  $k$  Kugeln aus einem Gefäß mit  $n$  Kugeln mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel 7:

Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, die aus den Ziffern 1, 2 und 3 gebildet werden können?

**Lösung:** Es gibt  $n = 3$  Objekte (1, 2 und 3). Daraus sind  $k = 5$  Zahlen nacheinander auszuwählen und der Reihe nach anzuordnen. Dafür gibt es  $3^5 = 243$  verschiedene Möglichkeiten.

Inhaltlich würde man so argumentieren: An jeder Stelle der fünfstelligen Zahl kann eine der Ziffern 1, 2 oder 3 stehen. Das sind jeweils 3 Möglichkeiten, folglich insgesamt  $3^5$  Möglichkeiten.

*Hinweis:* Mit diesem Konzept kann auch die Aufgabe c) im Beispiel 6 gelöst werden. Wenn die Anzahl aller möglichen Wurfbilder berechnet werden soll, dann kann jeder der 9 Kegel gefallen oder noch stehen geblieben sein. Das sind  $2^9 = 512$  verschiedene Möglichkeiten.

## 3.5 Permutation mit Wiederholung

Wir betrachten wieder  $n$  Objekte, von denen aber im Unterschied zu 3.1 nicht alle unterscheidbar sind. Unter den  $n$  Objekten soll es nur  $r$  unterscheidbare Objekte geben. Die  $n$  Objekte lassen sich deshalb in  $r$  Gruppen einteilen, die jeweils aus nicht unterscheidbaren Objekten bestehen. In jeder der  $r$  Gruppen gibt  $k_i$  die Anzahl der nicht unterscheidbaren Objekte an.

### Formel:

Da wir wieder die Anzahl ermitteln wollen, auf wie viele Arten man die  $n$  Objekte in verschiedenen Reihenfolgen anordnen kann und das Vertauschen nicht unterscheidbarer Objekte zu keiner neuen Anordnung führt, erhält man für die Anzahl dieser Permutationen

$$P_n^w = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

mit  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ . Man muss für jede Gruppe  $i$  durch die Anzahl der Vertauschungen  $k_i!$ , die keine neue Anordnung bedeuten, dividieren.

### Beispiel 8:

Wir haben in einer Urne 4 blaue, 3 weiße, 2 grüne und eine rote Kugel. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden?

**Lösung:** Es gibt  $n = 10$  Objekte (Kugeln). Davon sind  $r = 4$  Gruppen unterscheidbar (blau, weiß, grün, rot). Weiterhin gilt für blau  $k_1 = 4$ , für weiß  $k_2 = 3$ , für grün  $k_3 = 2$  und für rot  $k_4 = 1$ .

Daraus folgt für die Anzahl verschiedener Reihenfolgen mit  $P_{10}^w = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 12.600$ . Wären alle 10 Objekte unterscheidbar, dann gäbe es  $10!$  verschiedene Reihenfolgen. Für die vier blauen Kugeln müssen wir deren Vertauschungen herausrechnen, also durch  $4!$  dividieren usw.

## 3.6 Kombination mit Wiederholung

Für diese 6. Grundaufgabe der Kombinatorik ist die Formel allerdings schwer herzuleiten. Sie lautet:

Formel:

$$K_{n,k}^w = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Beim Urnenmodell entspricht diese Grundaufgabe dem Ziehen von  $k$  Kugeln aus einem Gefäß mit  $n$  Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel 9:

Wir haben einen Kasten Apfelsaft, einen Kasten Johannisbeersaft und einen Kasten Orangensaft mit jeweils 6 Flaschen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 5 Obstsaftflaschen zusammenzustellen, wenn sich nicht jede Obstsaftsorte unter den ausgewählten Flaschen befinden muss?

**Lösung:** Es gibt  $n = 3$  Objekte (Obstsaftsorten), aus denen  $k = 5$  Objekte (Obstsaftflaschen) auszuwählen sind. Dafür gibt es  $K_{3,5}^w = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$  verschiedene Zusammenstellungen.

## Aufgaben: Grundlegende Zählmethoden

### Aufgabe 1

8 Schüler wollen in einer Halle Fußball spielen. Wie viele verschiedene Einteilungen in zwei Vierermanschaften sind möglich?

### Aufgabe 2

Ermittle die Anzahl aller fünfstelligen Zahlen, die ...

- a) ...ungerade sind,
- b) ...nur aus ungeraden Ziffern bestehen,
- c) ...nur aus paarweise verschiedenen ungeraden Ziffern bestehen,
- d) ...aus paarweise verschiedenen Ziffern bestehen,
- e) ...keine aufeinander folgenden gleichen Ziffern haben.

### Aufgabe 3

Anna, Lara und vier weitere Freundinnen verabreden sich zum Eisessen im Eiscafé. Dort wollen sie an einem runden Tisch mit sechs Stühlen Platz nehmen.

- a) Ermittle die Anzahl der Reihenfolgen, in denen die sechs Freundinnen nacheinander das Eiscafé betreten können.
- b) Zwei Sitzordnungen werden genau dann als gleich angesehen, wenn jede Freundin in beiden Sitzordnungen die gleiche rechte Nachbarin hat. Ermittle unter dieser Bedingung die Anzahl der Sitzordnungen.
- c) Zwei Sitzordnungen werden wieder genau dann als gleich angesehen, wenn jede Freundin in beiden Sitzordnungen die gleiche rechte Nachbarin hat. Anna möchte nun aber nicht, dass Lara neben ihr sitzt. Ermittle die Anzahl der Sitzordnungen, bei denen Lara nicht neben Anna sitzt.

### Aufgabe 4

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 13 Mädchen in einer Jugendherberge mit einem 3-Bett-, einem 4-Bett- und einem 6-Bett-Zimmer unterzubringen?

## Aufgabe 5

Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3, 5, 7 und 9 bilden, wenn keine Ziffer in einer Zahl mehrfach kommen darf?

## Aufgabe 6

Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, dass keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören.

## Etwas zum freien Denken...

## Aufgabe 7

Berechne für die abgebildete Figur die Größe des Winkels  $\alpha$ .

